

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIA

POZIOM ROZSZERZONY

Zadanie 1.

Zapisanie warunku $|x - 4| - |x + 6| \geq 0$.

$$1^0 x \in (-\infty, -6)$$

$$|x - 4| = -x + 4 \wedge |x + 6| = -x - 6, -x + 4 + x + 6 \geq 0 \text{ zatem } x \in (-\infty, -6).$$

$$2^0 x \in (-6, 4)$$

$$|x - 4| = -x + 4 \wedge |x + 6| = x + 6, -x + 4 - x - 6 \geq 0, x \leq -1 \text{ zatem } x \in (-6, -1).$$

$$3^0 x \in (4, \infty)$$

$$|x - 4| = x - 4 \wedge |x + 6| = x + 6, x - 4 - x - 6 \geq 0, \text{ brak rozwiązania.}$$

Odpowiedź: Dziedziną funkcji jest $(-\infty, -1)$.

Zadanie 2.

Z treści zadania wynika, że $b = a + r, c = a + 2r, d = a + 3r$.

$W(-1) = a \cdot (-1)^3 + (a + r) \cdot (-1)^2 - (a + 2r) \cdot (-1) - (a + 3r) = 0$, zatem liczba -1 jest pierwiastkiem tego wielomianu.

$$W(x) = (x + 1)(ax^2 + rx - a - 3r),$$

zbadamy liczbę pierwiastków trójmianu $ax^2 + rx - a - 3r$ (z warunku $a \cdot r > 0$ wynika, że $a \neq 0$)

$$\Delta = r^2 - 4a(-a - 3r) = r^2 + 4a^2 + 12ar > 0 \text{ (bo } a \cdot r > 0)$$

sprawdzimy jeszcze czy liczba -1 może być pierwiastkiem trójmianu, wtedy $a - r - a - 3r = 0$, $r = 0$, co jest sprzeczne z założeniem $a \cdot r > 0$.

Odpowiedź: Wielomian $W(x)$ ma trzy różne pierwiastki dla $ar > 0$.

Zadanie 3.

Dla dowolnego kąta α :

$$4^{\cos^2 \alpha} \cdot 8^{\cos^2 \alpha} \cdot 32^{\sin^2 \alpha} = 2^{2\cos^2 \alpha} \cdot 2^{3\cos^2 \alpha} \cdot 2^{5\sin^2 \alpha} = 2^{5(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)} = 2^5 = 32.$$

Odpowiedź: Wartość podanego wyrażenia nie zależy od α .

Zadanie 4.

$$\text{Obliczamy } a_5 = \binom{10}{7} = 120.$$

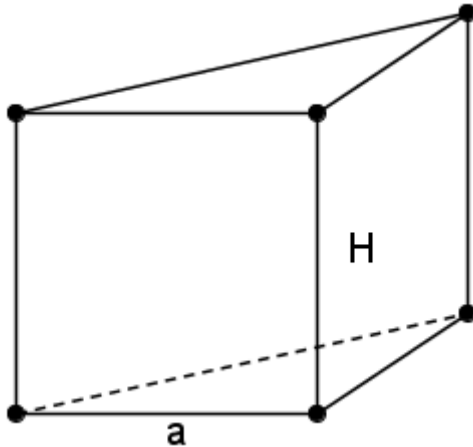
$$b_1 = 3, b_2 = -4, b_3 = -18, b_4 = -46.$$

$$a_5 - b_4 = 166.$$

Odpowiedź: $a_5 - b_4 = 166$.

Zadanie 5.

Wprowadzamy oznaczenia (rysunek)



$$6a + 3H = 60, \text{ stąd } a = 10 - 0,5H.$$

$$P_b = 3aH = 3(10 - 0,5H)H = 30H - 1,5H^2$$

Otrzymaliśmy funkcję kwadratową
 $f(H) = -1,5H^2 + 30H$, gdzie $H \in (0, 20)$

$$\text{Wyznaczamy } p = -\frac{30}{2 \cdot (-1,5)} = 10 \in (0, 20).$$

Odpowiedź: Największe pole powierzchni bocznej ma graniastosłup o wysokości równej 10.

Zadanie 6.

Wyznaczamy $A = (1, 0)$.

Aby wyznaczyć współrzędne B rozwiązujemy układ równań $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ -2x + 3y = 6 \end{cases}$, $B = (3, 4)$.

$C = (5, 3)$.

Zatem $|AB| = \sqrt{20}$, $|BC| = \sqrt{5}$, $|AC| = \sqrt{25}$, $|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$. Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa wynika, że trójkąt ABC jest prostokątny co należało wykazać.

Środek okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym jest środkiem przeciwprostokątnej $S = \left(3, \frac{3}{2}\right)$,
 promień $r = \frac{1}{2}|AC|$.

Odpowiedź: Równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC $(x - 3)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$.

Zadanie 7.

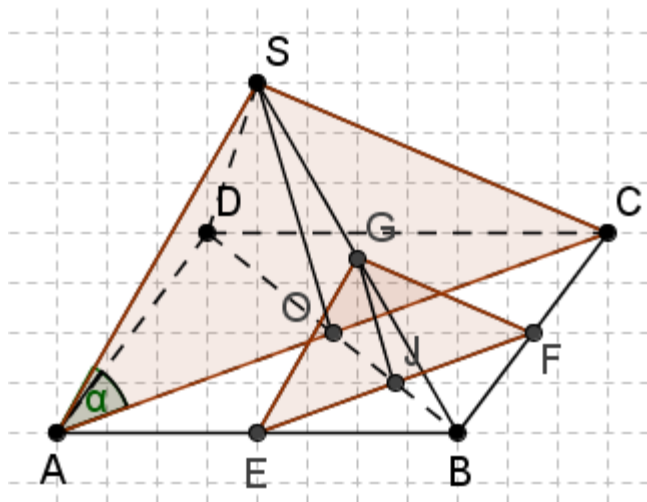
$$\bar{\Omega} = 900.$$

A – zdarzenie polegające na tym, że wybrano liczbę, która jest sumą kolejnych pięciu liczb naturalnych, $\bar{A} = 180$ [niech $a \in \mathbb{N}$, $a + (a + 1) + (a + 2) + (a + 3) + (a + 4) = 5a + 10 = 5(a + 2)$, wybrana liczba musi być podzielna przez 5, najmniejszą jest 100, największą 995, $995 = 100 + (n - 1) \cdot 5$, stąd $n = 180$]

$$P(A) = \frac{\bar{A}}{\bar{\Omega}} = \frac{180}{900} = \frac{1}{5}.$$

Odpowiedź: $P(A) = \frac{1}{5}$.

Zadanie 8.



$$|AC| = 12\sqrt{2}, |AO| = 6\sqrt{2}$$

$$|SO| = H, \operatorname{tg}\alpha = \frac{H}{|AO|}, \text{ stąd } H = 6\sqrt{6}.$$

Objętość ostrosłupa ACDS:

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 12^2 \cdot 6\sqrt{6} = 144\sqrt{6}.$$

$$|EB| = |BF| = 6, |GJ| = \frac{1}{2}H = 3\sqrt{6}.$$

Objętość ostrosłupa EBFJG:

$$V_3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6^2 \cdot 3\sqrt{6} = 18\sqrt{6}.$$

Objętość trzeciej figury:

$$V_2 = V_1 - V_3 = 126\sqrt{6}.$$

Odpowiedź: $V_1 = 144\sqrt{6}, V_2 = 126\sqrt{6}, V_3 = 18\sqrt{6}.$

Zadanie 9.

Odległość punktu $P = (1, 2)$ od prostej $x - y + \cos\alpha = 0$ jest równa $\frac{|1-2+\cos\alpha|}{\sqrt{2}}.$

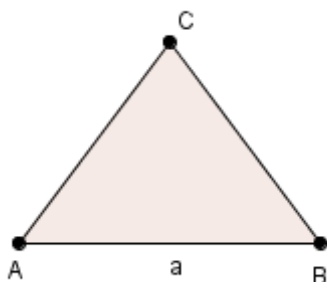
Stąd $\frac{|\cos\alpha - 1|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}, |\cos\alpha - 1| = \frac{1}{2}.$

$\cos\alpha = 1 \frac{1}{2} \notin \langle -1, 1 \rangle \vee \cos\alpha = \frac{1}{2}.$

$\cos\alpha = \frac{1}{2} \wedge \alpha \in \langle 0, 2\pi \rangle, \text{ zatem } \alpha = \frac{\pi}{3} \vee \alpha = \frac{5}{3}\pi.$

Odpowiedź: $\alpha \in \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi \right\}.$

Zadanie 10.



$|AC| = |BC| = 3a \ (a > 0)$

Obliczamy pole trójkąta ABC (np. z wzoru Herona): $\frac{\sqrt{35}}{4}a^2.$

r - długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt ABC

$\frac{1}{2} \cdot 7a \cdot r = \frac{\sqrt{35}}{4}a^2, \text{ stąd } r = \frac{\sqrt{35}}{14}a.$

R - długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie

$3a^3: 4R = \frac{\sqrt{35}}{4}a^2, \text{ stąd } R = \frac{9\sqrt{35}}{35}a.$

$r + R = 23, \frac{\sqrt{35}}{14}a + \frac{9\sqrt{35}}{35}a = 23, a = 2\sqrt{35}.$

Odpowiedź: Ramię tego trójkąta ma długość $6\sqrt{35}.$

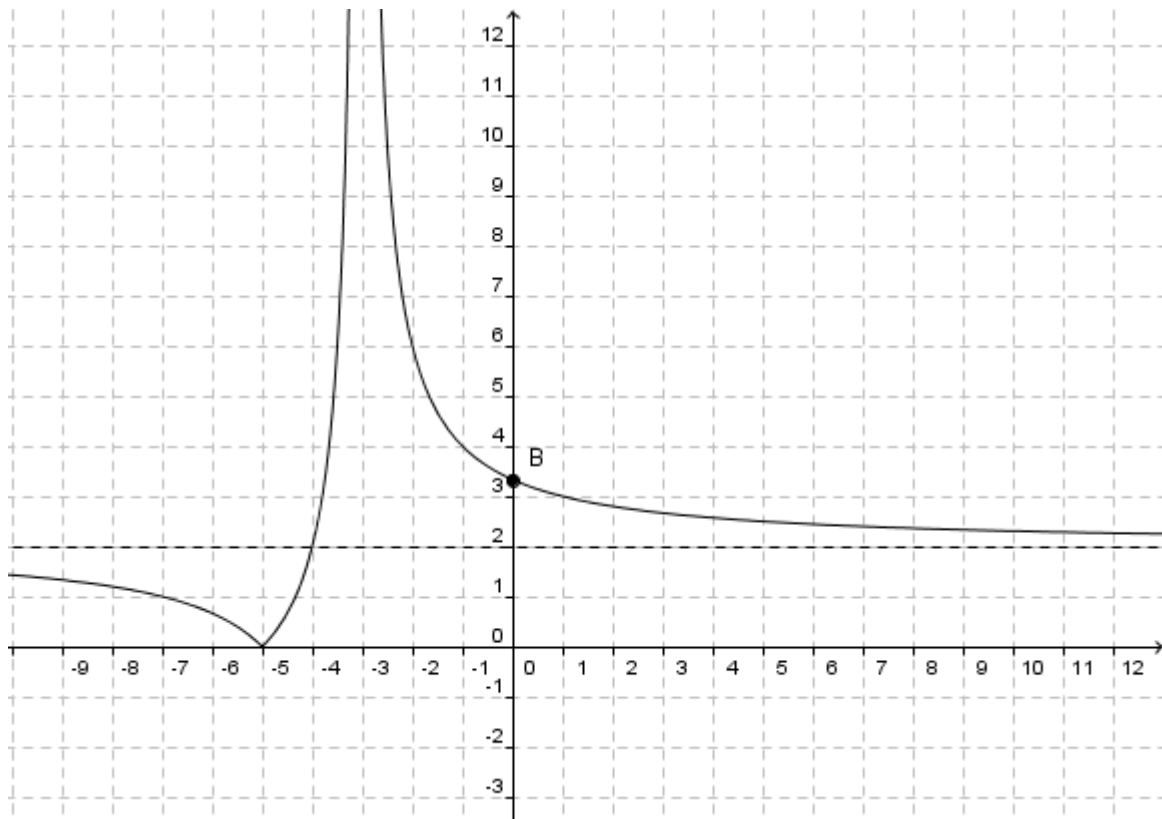
Zadanie 11.

Dziedziną funkcji jest $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$, stąd $-3 + c = 0$, $c = 3$.

$$f(-7) = \frac{-7a+b}{-7+3} = 1, b = 7a - 4.$$

$$f(x) = \frac{ax+7a-4}{x+3} = \frac{4a-4}{x+3} + a, a = 2, b = 10.$$

Szkicujemy wykres funkcji $|f(x)|$



Wyznaczamy $B = (0, 3\frac{1}{3})$. Odczytujemy z wykresu, że równanie $\left|\frac{ax+b}{x+c}\right| = m$ ma dwa rozwiązania różnych znaków dla $m \in (2, 3\frac{1}{3})$.

Odpowiedź: $a = 2, b = 10, c = 3$. Równanie $\left|\frac{ax+b}{x+c}\right| = m$ ma dwa rozwiązania różnych znaków dla $m \in (2, 3\frac{1}{3})$.

