

MATEMATYKA – POZIOM ROZSZERZONY

Zad.1 (4 pkt.)

Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \sqrt{|x - 4| - |x + 6|}$.

Zad. 2. (6 pkt.)

Dany jest wielomian $W(x) = ax^3 + bx^2 - cx - d$. Liczby a, b, c, d tworzą w podanej kolejności ciąg arytmetyczny o różnicy r . Wykaż, że liczba (-1) jest pierwiastkiem tego wielomianu. Ile różnych pierwiastków ma ten wielomian, jeśli wiadomo, że $a \cdot r > 0$?

Zad. 3 (2 pkt)

Uzasadnij, że wartość wyrażenia $4^{\cos^2 \alpha} \cdot 8^{\cos^2 \alpha} \cdot 32^{\sin^2 \alpha}$ nie zależy od wartości α .

Zad.4 (3 pkt)

Ciąg (a_n) opisany jest wzorem ogólnym $a_n = \binom{n+5}{n+2}$, zaś ciąg (b_n) wzorem rekurencyjnym

$$\begin{cases} b_1 = 3 \\ b_{n+1} = 2b_n - 10 \end{cases} \text{ dla } n \geq 1. \text{ Oblicz } a_5 - b_4.$$

Zad. 5(4 pkt)

Wśród wszystkich graniastosłupów prawidłowych trójkątnych, w których suma długości wszystkich krawędzi jest równa 60, jest taki, który ma największe pole powierzchni bocznej. Oblicz długość wysokości tego graniastosłupa.

Zad.6 (6 pkt)

Punkt A jest wierzchołkiem paraboli $y = 2x^2 - 4x + 2$, punkt B jest punktem przecięcia się prostych o równaniach $3x - 2y = 1$ i $-2x + 3y = 6$, a punkt C jest środkiem okręgu o równaniu $x^2 - 10x + y^2 - 6y + 18 = 0$. Wykaż, że trójkąt ABC jest trójkątem prostokątnym. Napisz równanie okręgu opisanego na tym trójkącie.

Zad. 7 (4 pkt)

Spośród wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych wybieramy jedną liczbę. Jakie jest prawdopodobieństwo wybrania liczby, która jest sumą kolejnych pięciu liczb naturalnych?

Zad. 8 (6 pkt)

Ostrosłup prawidłowy czworokątny, o krawędzi podstawy 12 i kącie nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy o mierze 60° , rozcięto dwiema płaszczyznami na trzy części. Pierwsza płaszczyzna jest wyznaczona przez przekątną podstawy i wierzchołek ostrosłupa, a druga jest równoległa do pierwszej i przechodzi przez środki krawędzi podstawy wychodzących z jednego wierzchołka. Oblicz objętość każdej z tych części.

Zad. 9 (4 pkt)

Dla jakich wartości parametru $\alpha \in \langle 0, 2\pi \rangle$ odległość punktu $P = (1, 2)$ od prostej $y = x + \cos \alpha$ jest równa $\frac{\sqrt{2}}{4}$?

Zad. 10 (6 pkt)

W trójkącie równoramiennym ramię jest trzy razy dłuższe od podstawy. Suma długości promienia okręgu opisanego na tym trójkącie i promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równa 23. Oblicz długość ramienia tego trójkąta.

Zad.11 (5 pkt)

Rysunek przedstawia wykres funkcji $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$,

- Wyznacz wartości a, b, c .
- Dla jakich wartości parametru $m \in \mathbb{R}$ równanie $\left| \frac{ax+b}{x+c} \right| = m$ ma dwa rozwiązania różnych znaków?



